

Volume em reservatório elipsoidal cilindríforme horizontal

João Jachic (Doutor)

Curso de Engenharia Civil - Universidade Tuiuti do Paraná

Israel Pinheiro (Discente)

Curso de Engenharia Civil - Universidade Tuiuti do Paraná

Sandro Mota (Discente)

Curso de Engenharia Civil - Universidade Tuiuti do Paraná

Resumo

Analisamos a evolução temporal do nível do fluido líquido em reservatório quando estiver sendo enchido por um tubo com vazão conhecida e constante no tempo. Determinamos, também, o volume do líquido dentro do reservatório para um nível específico. O reservatório é elipsoidal cilíndrico com o eixo de simetria posicionado horizontalmente. A geometria elíptica é transformada em cilíndrica através do uso de coordenadas relativas adimensionais, que permitem uma formulação simples pela o elemento infinitesimal de volume da região inundada com o fluido dentro do reservatório posicionado horizontalmente. Utilizamos a integração dupla para deduzir uma expressão do volume do fluido em função da elevação do nível. Desenvolvemos um programa computacional no MatLab para o cálculo do volume, da variação temporal da elevação do nível, e das representações bi e tri-dimensionais analíticas do reservatório parcialmente cheio. Os resultados evidenciam a simplicidade e a utilidade do cálculo bem como a visualização espacial do volume do fluido dentro do reservatório elipsoidal cilíndrico.

Palavras-chave: volume, tanque, elipsoidal, *MatLab*, nível

Abstract

A time evolution of a liquid fluid level in a reservoir is analyzed when it is being filled by a tube with a constant flow. The volume of the liquid inside the filled reservoir is also determined for a specified flood level. The reservoir is a cylinder, horizontally positioned, with an elliptic base. The elliptic geometry is transformed to cylinder through non dimensional relative coordinates, which permit a simple formulation of the infinitesimal volume element of the flooded region in the reservoir. Double integration scheme is utilized to deduce a mathematical expression of the volume of the fluid as a function of the flooded level. A computational program in MatLab has been developed to implement the calculation of the volume and the time variation of the level as well as the three-dimensional analytical representations of the partially filled fluid volume. The results prove the simplicity and the utility of the calculation as well as the spatial visualization of the elliptical cylinder reservoir graphed analytically.

Key-words: volume, reservoir, elliptical, *MatLab*, level

Introdução

No estágio atual da tecnologia, os reservatórios para conter fluidos são projetados para serem funcionais e ainda assim econômicos. Para o armazenamento de fluidos gasosos sob alta pressão, são normalmente utilizados reservatórios com formas aproximadamente esféricas, evitando assim o acúmulo de tensões mecânicas em cantos e arestas. Para o armazenamento de fluidos líquidos não voláteis ou pouco voláteis, prefere-se as formas cilíndricas, já que a distribuição das pressões deste fluido não ocasiona tensões mecânicas apreciáveis nas paredes do reservatório, mesmo quando houver cantos e arestas. Porém, a forma dos reservatórios deve levar em conta também o processo de descarga do fluido. Os silos de armazenamento de grãos, por exemplo, são normalmente cilíndricos retos ou em forma de cones com o eixo de simetria na vertical para explorar o gradiente da força gravitacional por ocasião da descarga do conteúdo. Esta forma e disposição do reservatório

para grãos e similares está intimamente relacionada ao atrito de escoamento do conteúdo sob ação da gravidade. Já para o armazenamento de fluidos líquidos, como água, gasolina, solventes, etc, usam-se os reservatórios cujo eixo de simetria é horizontal, uma vez que o atrito de escoamento dos líquidos é pequeno e insuficiente para se opor ao gradiente gravitacional, de tal forma que o escoamento se processa naturalmente só pela ação da força da gravidade. Se adicionalmente estes reservatórios para os líquidos forem projetados para serem transportados, então teremos tanques cilíndricos ou elipsoidais cilíndricos. Isto porque a forma alongada do tanque, com baixo centro de gravidade, é apropriada para ser transportada em carretas sobre rodas. Quando o fluido líquido exigir um acondicionamento sob pressão maior do que a atmosférica, como no caso de oxigênio líquido, nitrogênio líquido, líquidos altamente inflamáveis, líquidos corrosivos, etc, então o tanque é cilíndrico com diâmetro substancialmente menor do que o comprimento. Isto porque tal forma cilíndrica alongada assegura boa estabilidade dinâmica, já que o centro de gravidade é baixo, e ainda proporciona boa resistência às tensões mecânicas devido a forma circular da base. Por outro lado, quando o líquido puder ser adequadamente acondicionado na pressão atmosférica como a água, gasolina, óleo diesel, etc, então o tanque pode ser elipsoidal

cilíndrico. Isto porque a forma elipsoidal permite um abaixamento ainda maior do centro de gravidade do tanque quando comparado com o tanque cilíndrico. Desta forma, este tanque poderá ter volume consideravelmente maior do que o cilíndrico e ainda assim apresentar boa estabilidade dinâmica quando solicitado por acelerações centrífugas ao longo de trajetórias curvas em deslocamentos com velocidade adequada por ocasião do seu transporte nas rodovias.

Objetivos

Neste trabalho, analisamos a evolução temporal do nível do fluido líquido no reservatório elipsoidal cilíndrico quando estiver sendo enchido por um tubo com vazão conhecida e constante no tempo. Adicionalmente determinamos o volume do líquido dentro do reservatório para um nível específico. Tal determinação é importante para os transportadores de combustíveis e para o corpo de bombeiros, que operam os caminhões utilizados para apagar incêndios. Esta tarefa abordada neste artigo é parte integrante do processo de aprendizagem da matéria de cálculo B lecionada no curso de Engenharia Civil. Isto porque envolve aplicações de vetores, matrizes, retas, planos, trigonometria, integrais não imediatas, integrais duplas e equações diferenciais.

Metodologia de cálculo

O volume de líquido para uma determinada altura de nível de um tanque elipsoidal cilindriforme, posicionado horizontalmente, deve ser calculado por integração de uma área infinitesimal multiplicado pelo comprimento do tanque. A determinação da área da base se torna importante neste caso, visto que o resultado não é trivial e pouco conhecido pelos operadores destes caminhões tanque. A integração da área da base é feita baseada no esboço da figura 1 abaixo. Optamos pela forma elipsoidal uma vez que o cilindro é um caso particular da forma elipsoidal cilindriforme. Tradicionalmente as dimensões de tal geometria são referenciadas pelos semi-eixos horizontal e vertical, a e b , respectivamente, e pelo comprimento L . O semi-eixo horizontal, a , deve ser maior do que o semi-eixo vertical, b , para assegurar que o centro de gravidade do tanque esteja elevado o mínimo possível. Tipicamente, o valor de a é aproximadamente o dobro de b , para os tanques que transportam água e combustíveis pouco inflamáveis. Todos os gráficos e os desenhos bi e tri-dimensionais analíticos do tanque elipsoidal cilindriforme são fornecidos pelo programa computacional em MatLab (*Matricial Laboratory – The Language of Technical Computing*) anexado no apêndice. O referido programa computacional foi desenvolvido em parceria com os alunos em decorrência

das aulas práticas de cálculo B aplicado a problemas reais da Engenharia Civil da Universidade Tuiuti do Paraná.

FIGURA 1.A - ESBOÇO DOS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DA ÁREA DA ELIPSE DE SEMI-EIXOS A E B , CENTRADA NA ORIGEM.

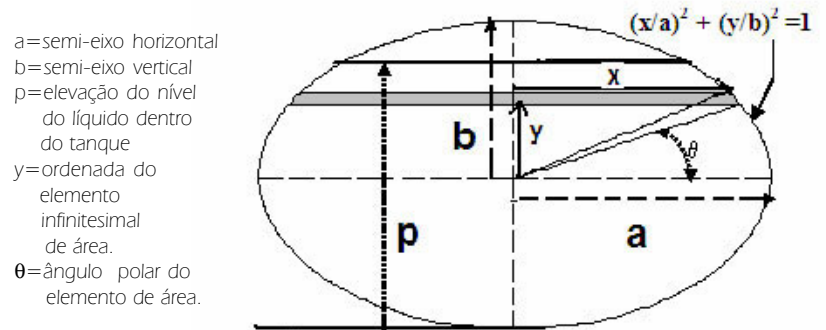
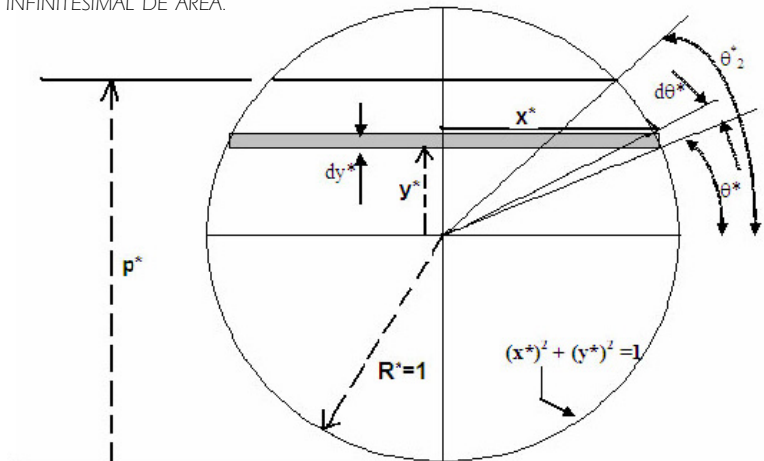


FIGURA 1.B - ESBOÇO DOS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DO CÍRCULO EQUIVALENTE DE RAIO UNITÁRIO R^* E DA ESQUEMATIZAÇÃO DO ÂNGULO POLAR θ^* PARA O ELEMENTO INFINITESIMAL DE ÁREA.



Por simplicidade, admitimos que a elipse está centrada na origem no sistema de coordenadas xy . Definimos agora um sistema de coordenadas relativas x^*y^* adimensionais para o qual a elipse de semi-eixos a e b , se transforma no círculo de raio unitário R^* também centrado na origem. Neste caso, tem-se

$$x^*=x/a; \quad y^*=y/b; \quad p^*=p/b \quad (1)$$

As equações da elipse no sistema xy e da circunferência no sistema x^*y^* são:

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1; \quad (x^*)^2 + (y^*)^2 = 1 \quad (2)$$

O elemento infinitesimal de área no sistema xy e hachurado na figura 1.a, será:

$$dA=2xdy \quad (3).$$

Porém, como $x=x^*a$, $y=y^*b$, segue-se que $dA=2^*x^*abdy^*$.

Pela figura 1.b, sabe-se que o elemento de arco $ds^*=R^*dq^*$ no sistema x^*y^* se relaciona com dy^* como:

$$dy^*=ds^*\cos(\theta^*) \quad (4)$$

Adicionalmente, vê-se pelos elementos geométricos na figura 1.b que:

$$x^*=(1-y^{*2})^{1/2} \text{ e } y^*=R^*\text{sen}(\theta^*) \quad (5)$$

Como R^* vale um, substituindo os valores de x^* e y^* na expressão de dA , tem-se:

$$dA = 2ab\sqrt{1-\text{sen}^2(\theta^*)}\cos(\theta^*)d\theta^* = 2ab\cos^2(\theta^*)d\theta^* = ab(1+\cos(2\theta^*))d\theta^* \quad (6)$$

A integração de dA é imediata, onde o ângulo q^* , em radianos, deve variar de $-\pi/2$ até q_2^* em radianos. Assim, a área da parte inundada pelo líquido até o nível p será:

$$A = ab \int_{-\pi/2}^{q_2^*} (1 + \cos(2\theta^*))d\theta^* = ab(\pi/2 + \theta_2^* + \frac{1}{2}\text{sen}(2\theta_2^*)) \quad (7)$$

O esquema geométrico apresentado na figura 1.b possibilita o cálculo do ângulo q_2^* , como sendo:

$$q_2^* = \text{asen}(p^*-1) = \text{asen}(p/b-1) \quad (8)$$

Quando o nível de elevação do líquido está abaixo do centro da elipse, o valor do ângulo q_2^* fornecido pela equação (8) é negativo e igualmente válido para

ser usado na equação (7) para a determinação da área A . O volume do líquido dentro do tanque elipsoidal cilíndrico de comprimento L é simplesmente:

$$V=AL \quad (9)$$

O valor numérico do volume V para uma elevação p do nível de líquido dentro do tanque é trivialmente calculado pelas equações 7, 8 e 9. Porém, muitas vezes queremos determinar o valor numérico da elevação p quando o tanque elipsoidal cilíndrico está sendo enchido com vazão F durante um tempo t . Neste caso tem-se que o volume é $V=Ft$ enquanto que a determinação de p envolve a resolução de uma equação transcendental. Para tal, usamos a facilidade da programação de uma *function* no MatLab, transcrita parcialmente abaixo.

Valores constantes de entrada : a, b, L, t, fi (para a vazão F)

Exemplo de instruções de programação:

```
syms p; ps=p/b; teta2=asin(ps-1); nV=fi*t/(a*b*L);
eq=pi/2+teta2+.5*sin(2*teta2)-nV; s=solve(eq);
p=double(s);
```

O procedimento acima permite que se determine a evolução temporal $p(t)$ dos níveis de elevação para

uma seqüência de valores de tempo de carga do fluido no tanque. Tal cálculo é importante porém deve ser feito por um programa de computação já que envolve muitas resoluções da equação transcendental. Este cálculo computacional é feito por um programa escrito no *MatLab* com o nome *VolumeCarroPipa* e transcrito no apêndice anexo. Nele as configurações do carro pipa foram feitas por geometria analítica a partir das dimensões geométricas. A visão em perspectiva envolve também uma matriz de rotação de um ângulo q , amplamente utilizada nas aulas de cálculo B e Álgebra linear do Curso de Engenharia Civil da UTP. Genericamente, o contorno de uma superfície no plano xy pode ser representado pela matriz $S=[S_x \ S_y]$, onde S_x é o conjunto das abscissas dos N pontos do contorno e S_y é o conjunto das ordenadas destes pontos do contorno. A matriz S' , de dimensão $2 \times N$, da superfície girada de um ângulo q , será:

$$S'=M*S \quad (10)$$

onde M é a matriz de rotação no plano xy dada por:

$$M = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (11)$$

A matriz de rotação está implementada numa sub-rotina no *MatLab* para utilização nos programas de desenho analítico de formas geométricas variadas.

4 Resultados

Aplicamos o programa computacional para alguns exemplos de interesse dos alunos do curso de Engenharia Civil da UTP e do corpo de bombeiros. Para tal, especificamos numericamente os parâmetros de entrada do programa. O parâmetro p (elevação do nível d'água) pode também ser entrado via teclado, desde que o valor digitado seja compatível ($0 < p < 2 \cdot b$) com as dimensões do tanque.

Exemplo 1 – Carro Pipa cilíndrico de 1m de diâmetro e 8m de comprimento sendo enchido com água na vazão constante de $1\text{m}^3/\text{min}$.

Comando de entrada do código computacional:

```
>> VolumeCarroPipa(1,.7,8,[.5.5],2,.4,.5,'cbr',8,[10
20],[.5.5],.01,2,2)
```

Saída código:

Altura do tanque = 1m

Entre com a altura do nível d água via teclado

Altura do nível d água = $>.65$

Vazão de água sendo despejada no carro pipa = $1\text{m}^3/\text{min}$

Volume total do carro pipa = 6.28m^3

Tempo para encher o carro pipa = 6.28min

Tempo de análise = 4min

No tempo de observação, $t_{ob}=2\text{min}$ tem-se:

Volume de água no tanque, $V_{ob}=2\text{m}^3$

Elevação do nível de água, $p_{ob}=0.36\text{m}$

Na elevação de nível de água, $p_{na}=0.65\text{m}$ tem-se:

Volume de água no carro pipa = 4.32m^3

que acontece no tempo = 4.32min de operação

FIGURA 2 – VARIAÇÃO TEMPORAL DA ELEVAÇÃO DO NÍVEL DE ÁGUA E DO ÂNGULO POLAR DO ESPELHO D'ÁGUA NO CARRO PIPA PARA O EXEMPLO 1

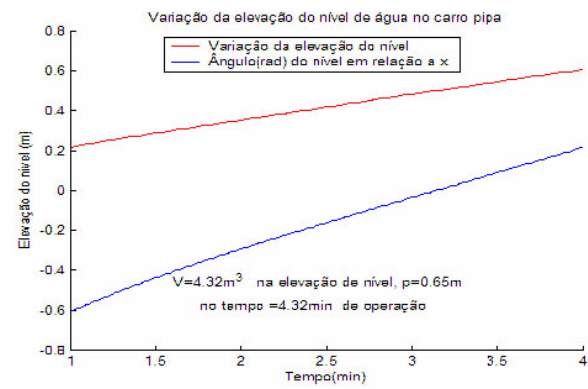


FIGURA 3 – VISÃO FRONTAL E LATERAL DO TANQUE CILINDRICO NO TEMPO $T=2\text{MIN}$ E NA ELEVAÇÃO DE NÍVEL $P=0,65\text{M}$ PARA O EXEMPLO 1.

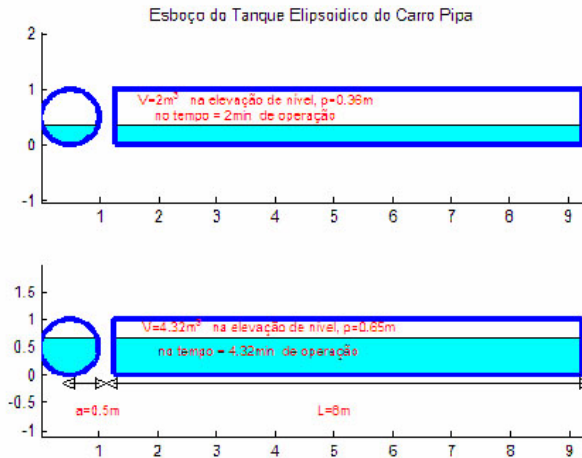
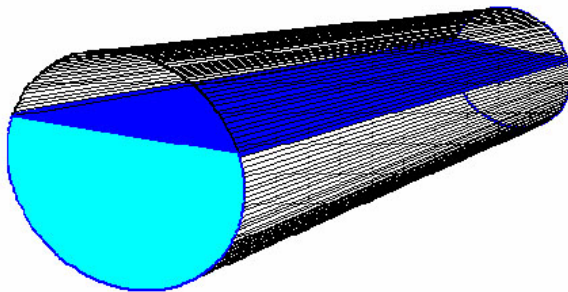


FIGURA 4 – VISÃO EM PERSPECTIVA DO TANQUE CILÍNDRICO PARA A ELEVAÇÃO DE NÍVEL $P=0,65\text{M}$.



Exemplo 2 – Carro Pipa elipsoidal cilíndrico com o semi-eixo horizontal $a=90\text{cm}$ maior do que o semi-eixo vertical $b=50\text{cm}$ e de comprimento $L=8\text{m}$, sendo enchido com água na vazão constante de $1\text{m}^3/\text{min}$.

Comando de entrada do código computacional:
`>>VolumeCarroPipa(1,.7,8,[.9 .5],2,.8,.5,'cbr',8,[10 20],[.7 .5],.01,2,2)`

Saída do código:

Altura do tanque = 1m

Entre com a altura do nível d água via teclado

Altura do nível d água = >-9

Vazão de água sendo despejada no carro pipa = $1\text{m}^3/\text{min}$

Volume total do carro pipa = 11.31m^3

Tempo para encher o carro pipa = 11.31min

Tempo de análise = 7min

No tempo de observação, $t_{ob}=2\text{min}$ tem-se:

Volume de água no tanque, $V_{ob}=2\text{m}^3$

Elevação do nível de água, $p_{ob}=0.23\text{m}$

Na elevação de nível de água, $e_{na}=0.8\text{m}$ tem-se:

Volume de água no carro pipa = 9.7m^3

que acontece no tempo = 9.7min de operação

Observemos que foi digitado o valor -9 para o parâmetro p , também chamado de e_{na} . Como este número é incompatível com o semi-eixo vertical então prevalece o valor entrado diretamente no comando de entrada.

FIGURA 5 – VARIÇÃO TEMPORAL DA ELEVAÇÃO DO NÍVEL DE ÁGUA E DO ÂNGULO POLAR DO ESPELHO D'ÁGUA NO CARRO PIPA PARA O EXEMPLO 2

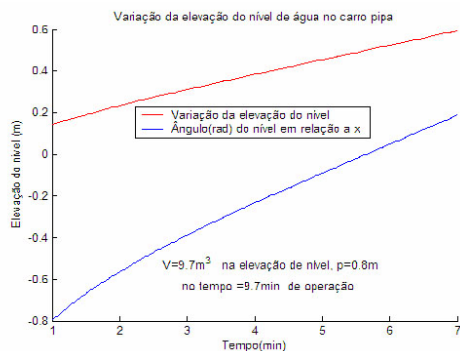


FIGURA 6 – VISÃO FRONTAL E LATERAL DO TANQUE ELIPSOIDAL CILINDRIFORME NO TEMPO T=2MIN E NA ELEVAÇÃO DE NÍVEL P=0,8M PARA O EXEMPLO 2.

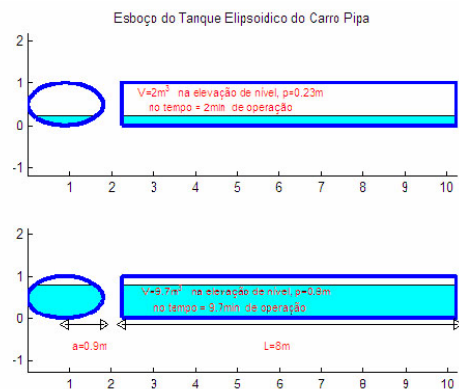
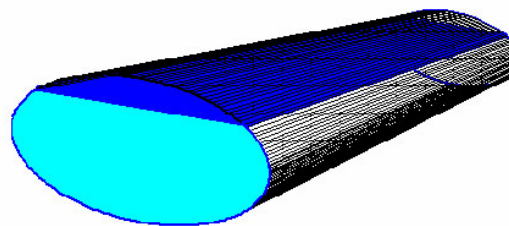


FIGURA 7 – VISÃO EM PERSPECTIVA DO TANQUE ELIPSOIDAL CILINDRIFORME PARA A ELEVAÇÃO DE NÍVEL P=0,8M DO EXEMPLO 2.



Exemplo 3 – Carro Pipa elipsoidal cilindriforme com o semi-eixo horizontal $a=90\text{cm}$ maior do que o semi-eixo vertical $b=50\text{cm}$ e de comprimento $L=8\text{m}$, enchido por pouco tempo com água na vazão constante de $1\text{m}^3/\text{min}$.

Comando de entrada do código computacional:

```
>>VolumeCarroPipa(1,.7,8,[.9 .5],2,.8,.5,'cbr',8,[10
20],[.7 .5],.01,2,2)
```

Saída do código:

Altura do tanque = 1m

Entre com a altura do nível d água via teclado

Altura do nível d água = >.1

Vazão de água sendo despejada no carro pipa = $1\text{m}^3/\text{min}$

Volume total do carro pipa = 11.31m^3
 Tempo para encher o carro pipa = 11.31min
 Tempo de análise = 7min
 No tempo de observação, $t_{ob}=2\text{min}$ tem-se:
 Volume de água no tanque, $V_{ob}=2\text{m}^3$
 Elevação do nível de água, $p_{ob}=0.23\text{m}$
 Na elevação de nível de água, $e_{na}=0.1\text{m}$ tem-se:
 Volume de água no carro pipa = 0.59m^3
 que acontece no tempo $=0.59\text{min}$ de operação

FIGURA 8 – VISÃO FRONTAL E LATERAL DO TANQUE ELIPSOIDAL CILINDRIFORME NO TEMPO $T=2\text{MIN}$ E NA ELEVAÇÃO INICIAL DE NÍVEL $P=0,1\text{M}$ PARA O EXEMPLO 3.

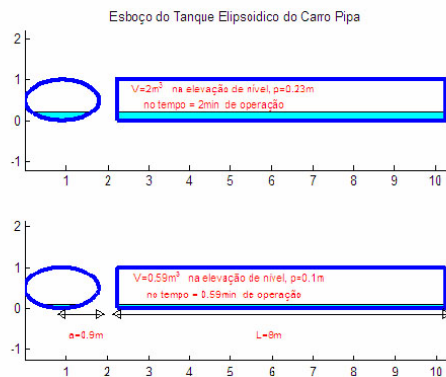
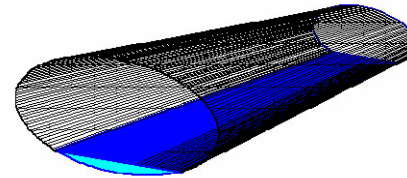


Figura 8 – Visão frontal e lateral do tanque elipsoidal cilindriforme no tempo

FIGURA 9 – VISÃO EM PERSPECTIVA DO TANQUE ELIPSOIDAL CILINDRIFORME PARA A ELEVAÇÃO DE NÍVEL $P=0,1\text{M}$ DO EXEMPLO 3.



5 Conclusões

Observamos que o volume de fluido dentro do tanque parcialmente cheio até a altura de nível p foi corretamente determinado pelo código computacional e que a representação analítica dos parâmetros geométricos foi eficiente e útil para a visualização do problema. A representação computacional analítica da vista frontal e lateral do reservatório elipsoidal cilindriforme está rigorosamente em escala, permitindo uma análise quantitativa do problema abordado. Adicionalmente, a representação em perspectiva preserva as dimensões relativas do reservatório porém com uma distorção proporcionada por dois ângulos de visão e um fator de redução menor do um, para oferecer uma simulação de impressão visual em perspectiva habitual da natureza.

Concluímos que o procedimento matemático-computacional está adequadamente simples, objetivo e funcional, permitindo o seu uso rotineiro em aplicações na engenharia civil para problemas envolvendo reservatórios com geometrias elípticas e cilíndricas. O problema do reservatório contendo um líquido com um soluto disperso, abastecido por uma tubulação ou afluente numa dada vazão e concentração, e adicionalmente desabastecido por um efluente numa vazão também conhecida também foi tratado computacionalmente, mas será apresentado futu-

ramente por alunos do curso de engenharia civil como parte do requisito no curso de cálculo B.

6 Agradecimento

Agradecemos ao Prof. Moacyr Molinari, coordenador do Curso de Engenharia Civil da UTP, pela adequação das ementas dos cursos permitindo e incentivando pesquisas e aplicações multidisciplinares diversas na Engenharia Civil.

7 Referências bibliográficas

HILDEBRAND, F.D. (1962). *Advanced Calculus for Applications*. Prentice Hall.

SPERLING, M.V. (2001). *Princípios básicos do tratamento de esgotos*, Departamento de Engenharia Sanitária e Ambiental – DESA. Belo Horizonte: UFMG.

MATSUMOTO, E.Y. (2003). *MATLAB 6 – Fundamentos de Programação*. São Paulo: Editora Érica.